Osservazioni sulla costruzione di matrici quadrate soddisfacenti a particolari condizioni

di Carlo Felice Manara

0. Avvertenza

Nel seguito indicheremo di regola con lettere maiuscole dell'alfabeto latino delle matrici quadrate ad elementi reali. I vettori saranno indicati con lettere minuscole, pure dell'alfabeto latino, eventualmente distinte tra loro con indici numerici apposti in alto a destra.

Le componenti dei vettori saranno supposte reali; i vettori ad n componenti saranno immaginati come matrici $(1, n)$, cioè come vettori-riga. Lo spazio dei vettori-riga sarà indicato con U. Considerato un vettore x, indicheremo con il simbolo x_T (apponendo cioè in basso a destra del simbolo x il simbolo «T» di trasposizione delle matrici) il vettore-colonna [matrice $(n, 1)$], che ha componenti uguali a quelle del vettore x. Lo spazio dei vettori colonna sarà indicato con V.

Oss. 1. I vettori V possono essere immaginati come vettori delle quantità di beni (in economia). I vettori U possono essere immaginati come forme lineari (a valori reali) su V, oppure come vettori di prezzi (in economia).

* * *

1. Siano dati due vettori:

$$(1.1) \qquad p \in U \quad ; \quad q_T \in V$$

poniamo:

$$(1.2) \qquad \sigma = p \cdot q_T;$$

Gli argomenti esposti in quest'articolo saranno ripresi, ed ulteriormente sviluppati, in un prossimo contributo ai volumi in onore di Siro Lombardini.

e supponiamo che valga l'ipotesi

(1.3) $\quad \sigma \neq 0.$

Sia $H(p, q)$ la matrice:

(1.4) $\quad H(p, q) = q_T \cdot p;$

Oss. 2. La matrice H ha rango 1, e può essere considerata come un operatore a destra sui vettori di U e come un operatore a sinistra sui vettori di V.

Tale operatore è ovviamente degenere: si ha infatti

(1.5) $$\begin{cases} x_T \in V \rightarrow H \cdot x_T = q_T \cdot (p \cdot x_T) \\ y \in U \rightarrow y \cdot H = p \cdot (y \cdot q_T) \end{cases}$$

Nella ipotesi (1.3), poniamo:

(1.6) $\quad K(p, q) = (1/\sigma) \cdot H(p, q).$

Oss. 3. Si ha:

(1.7) $\quad K^2 = K,$

ossia l'operatore K è idempotente. Inoltre, indicato con α un numero reale qualunque, si ha:

(1.8) $\quad \alpha \cdot p \cdot K = \alpha \cdot p \quad ; \quad \alpha \cdot K \cdot q = \alpha \cdot q$

Poniamo ora:

(1.9) $\quad S = I + K(p, q).$

Oss. 4. L'operatore S non è degenere; se considerato come operatore su U, esso ha p come autovettore, e, se considerato come operatore su V, esso ha q_T come autovettore.

Si ha infatti:

(1.10) $\quad p \cdot S = 2 \cdot p \quad ; \quad S \cdot q_T = 2 \cdot q_T$

Inoltre esistono due iperpiani di vettori uniti per S, uno in U ed uno in V. Si ha infatti:

$$(1.11) \qquad \begin{cases} \text{se } y \in U \text{ ed } y \cdot q_T = 0, & \text{allora} \quad y \cdot S = y; \\ \text{se } x_T \in V \text{ e } p \cdot x_T = 0, & \text{allora} \quad S \cdot x_T = x_T \end{cases}$$

Ponendo ora:

$$(1.12) \qquad \alpha = \alpha' + \alpha''$$

con

$$(1.13) \qquad \alpha', \alpha'' \neq 0$$

si verifica che la matrice:

$$(1.14) \qquad S = \alpha' \cdot I + \alpha'' \cdot K(p, q)$$

ha α come autovalore, ed ammette i vettori p e q_T rispettivamente come autovettori sinistro e destro, corrispondenti all'autovalore α.

* * *

2. Sia ora M una matrice quadrata, non degenere, sia α un suo autovalore, e siano p e q_T gli autovettori (rispettivamente sinistro e destro) che gli corrispondono. Si abbia cioè

$$(2.1) \qquad p \cdot M = \alpha \cdot p \quad ; \quad M \cdot q_T = \alpha \cdot q_T,$$

e supponiamo che sia valida l'ipotesi (1.2), cioè che si abbia

$$(2.2) \qquad \sigma = p \cdot q_T \neq 0.$$

Indichiamo ancora con S la matrice data dalle (1.14) e sia C la matrice:

$$(2.3) \qquad C = M - S.$$

Dalle definizioni date si trae che valgono le:

$$(2.4) \qquad p \cdot C = 0 \quad ; \quad C \cdot q_T = 0.$$

Dalle ipotesi (2.2) si trae che nessuno dei due vettori p e q_T può essere nullo; si conclude quindi che la matrice C, in conseguenza della (2.4), ha rango minore di n.

La costruzione di una matrice C, di rango minore di n, che soddisfi alle (2.4) si può conseguire con la procedura seguente: indichiamo con Q una matrice $(n, n-1)$ le cui colonne sono costituite da $(n-1)$ vettori-colonna, linearmente indipendenti, che formano una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione:

$$(2.5) \qquad p \cdot x_T = 0.$$

Analogamente, sia P una matrice $(n-1, n)$ le cui righe sono costituite da $(n-1)$ vettori-riga, linearmente indipendenti, che formano una base per lo spazio delle soluzioni dell'equazione:

$$(2.6) \qquad y \cdot q_T = 0.$$

Da quanto precede si ha che le due matrici P e Q hanno rango $(n-1)$.

Sia poi B una matrice quadrata $(n-1, n-1)$ e si costruisca la matrice:

$$(2.7) \qquad C = Q \cdot B \cdot P.$$

Dalla definizione delle matrici Q e P si deduce che la matrice C ha al massimo rango $(n-1)$ e che valgono le relazioni (2.4). Si ha inoltre:

$$(2.8) \qquad K(p \cdot q) \cdot C = C \cdot K(p, q) = 0.$$

Con scelta opportuna delle matrici B, P, Q, le matrici S e C permettono una decomposizione della matrice data M nella forma:

$$(2.9) \qquad M = S + C$$

sulla quale ritorneremo nel seguito.

* * *

3. La formula (2.9) può essere utilizzata per dare soluzione a certi problemi che interessano l'economia: precisamente la formula stessa permette di costruire matrici quadrate strettamente positive, che soddisfano a determinate condizioni.

Ricordiamo che noti teoremi di Perron e Frobenius assicurano che una matrice quadrata M, strettamente positiva, non degenere e non decomponibile, possiede un autovalore α positivo, e due autovettori $p \in Q$ e $q_T \in V$, strettamente positivi, che corrispondono all'autovalore α; questo risulta essere una radice semplice dell'equazione caratteristica della matrice M.

Valgono quindi le (2.1), ed inoltre si ha:

$$(3.1.) \qquad p > 0 \quad ; \quad q_T > 0$$

e quindi anche:

$$(3.2) \qquad p \cdot q_T = \sigma > 0.$$

Poniamo:

$$(3.3) \qquad p = [p_1, p_2, \ldots, p_n] \quad ; \quad q = [q_1, q_2, \ldots, q_n].$$

Ora, nella (1.12), scegliamo

$$(3.4) \qquad \alpha'' > 0$$

ed α in modo che siano soddisfatte le condizioni

$$(3.5) \qquad (p \cdot q_T) \cdot \alpha' + \alpha'' \cdot (p_i \cdot q_i) > 0 \qquad (1 \leq i \leq n);$$

con queste scelte, la matrice S data dalla (1.14) è strettamente positiva. Inoltre, per la (2.5) la matrice:

$$(3.6) \qquad M = S + C$$

ammette p e q_T come autovettori, rispettivamente sinistro e destro, corrispondenti all'autovalore α.

Oss. 5. La (3.6) esibisce la matrice M come funzione continua degli elementi della matrice C, ed in particolare, fissate P e Q, degli elementi della matrice B: quando è $B = 0$ si ha di conseguenza $C = 0$ e quindi la matrice M si riduce alla S, ed è strettamente positiva. In conseguenza della continuità, si avranno quindi dei valori degli elementi di B in corrispondenza ai quali la matrice M è ancora strettamente positiva.

* * *

4. Una classe particolare di matrici C, che entrano nella (3.6), può essere costruita con la procedura seguente: siano E ed F due matrici (n, n) emisimmetriche; si abbia cioè:

$$(4.1) \qquad E + E_T = 0 \quad ; \quad F + F_T = 0;$$

segue di qui che valgono le relazioni:

$$(4.2) \qquad p \cdot E \cdot p_T = 0 \quad ; \quad q \cdot F \cdot q_T = 0.$$

Indichiamo con D la matrice:

$$(4.3) \qquad D = E \cdot p_T \cdot q \cdot F$$

Oss. 6. Dalle (4.2) si trae:

$$(4.4) \qquad p \cdot D = 0 \quad ; \quad D \cdot q_T = 0.$$

Quindi la matrice D ha proprietà analoghe a quelle della matrice C, data dalla (2.7); tuttavia la D, ora costruita, ha rango 1, mentre la C può avere rango $(n - 1)$.

Sia ora M una matrice quadrata strettamente positiva, e siano p e q_T i suoi autovettori di Frobenius, corrispondenti all'autovalore α. Poniamo:

$$(4.5) \qquad \overline{M} = M + D;$$

dalle formule ora scritte si trae che $\overline{M}$ ha autovalore ed autovettori di Frobenius uguali a quelli di M. Inoltre la (4.5) esibisce $\overline{M}$ come funzione continua degli elementi delle matrici E ed F; infine $\overline{M}$ coincide con M quando si abbia $E = 0$ oppure $F = 0$.

È quindi possibile modificare la matrice M, agendo sugli elementi della matrice D, mantenendo costanti gli elementi di Frobenius della matrice quadrata.

* * *

5. Ciò che si è detto nel paragrafo precedente può essere sviluppato con i calcoli che seguono. Indichiamo con N l'insieme dei primi n numeri naturali; poniamo cioè:

$$(5.1) \qquad N = \{1, 2, 3, \dots n\}.$$

Poniamo:

$$(5.2) \qquad E = [e_{ir}] \quad ; \quad F = [f_{kj}] \quad ; \quad i, k, j, r \in N$$

Le (4.3) si traducono nelle:

$$(5.3) \qquad e_{ir} + e_{ri} = 0 \quad ; \quad f_{kj} + f_{jk} = 0.$$

Poniamo:

$$(5.4) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \overline{p}_T = E \cdot p_T & ; & \overline{p}_i = \sum_r e_{ir} \cdot p_r \\ \overline{q} = \overline{q} \cdot F & ; & \overline{q}_j = \sum_k f_{kj} \cdot q_k \end{array} \right\}.$$

Poniamo anche:

$$(5.5) \qquad D = [d_{ij}] = [\overline{p}_i \cdot \overline{q}_j]$$

$$d_{ij} = \sum_{r,k} e_{jr} \cdot f_{jk} \cdot p_r \cdot q_k.$$

Oss. 7. Sia P un sottoinsieme proprio di N e sia h la cardinalità (numero degli elementi) di P:

$$(5.6) \qquad |P| = h < n.$$

Scegliendo gli elementi della matrice E in modo che siano soddisfatte le h equazioni:

$$(5.7) \qquad \overline{p}_i = 0 \qquad i \in P$$

saranno nulle tutte le componenti delle righe di D che corrispondono agli indici $i \in P$; e quindi le corrispondenti righe $\overline{M}$ coincideranno con quelle di M.

Analogamente, indichiamo con Q un sottoinsieme proprio di N, e sia k la cardinalità (numero degli elementi) di Q:

(5.8) $\quad |Q| = k < n;$

scegliendo gli elementi della matrice F in modo che siano soddisfatte le k equazioni:

(5.9) $\quad \bar{q}_j = 0 \qquad i \in Q$

saranno nulle le componenti delle colonne di D che corrispondono agli indici $j \in Q$ e quindi le corrispondenti componenti $\overline{M}$ coincideranno con quelle di M.

* * *

6. La decomposizione di una matrice M, data dalla (3.6), può essere estesa ulteriormente qualora la matrice stessa soddisfi a determinate ipotesi. Precisamente, si supponga che la matrice M abbia n autovalori reali:

(6.1) $\quad \alpha_i, \quad i \in N$

e che tali autovalori siano tutti non nulli e diversi tra loro; si abbia cioè:

(6.2) $\quad \alpha_i \neq 0\,; \qquad i \neq j \rightarrow d_i \neq d_j; \qquad i, j \in N$

A questi autovalori corrispondono certi 2 y autovettori; si abbia cioè:

(6.3) $\quad p^i \cdot M = \alpha_i \cdot p^i \quad ; \quad M \cdot q_T^j = \alpha_j \cdot q_T^j; \qquad j, i \in N$

e supponiamo anche si abbia:

(6.4) $\quad \sigma_i = p^i \cdot q_T^i \neq 0; \qquad i \in N.$

È noto che si ha:

(6.5) $\quad i \neq j \rightarrow p^i \cdot q_T^i = 0 \quad ; \quad i, j \in N$

Si costruiscano ora gli n operatori:

$$(6.6) \qquad K_i = K(p^i, q^i).$$

A seguito delle ipotesi e delle definizioni date si ha:

$$(6.7) \qquad K_i^2 = K_i \quad ; \quad i \neq j \qquad K_i \cdot K_j = 0 \quad ; \quad i, j \in N.$$

Quindi si ha che l'operatore M ammette in questo caso la decomposizione canonica:

$$(6.8) \qquad M = \sum_i \alpha_i \cdot K_i \quad ; \quad i \in N.$$

In particolare, a seguito delle (6.7) si ha per ogni numero naturale m:

$$(6.9) \qquad M^m = \sum_i (\alpha_i)^m \cdot K_i.$$

In particolare, per $m = 0$, la formula (6.9) conduce alla relazione fondamentale:

$$(6.10) \qquad I = \sum_i K_i.$$

* * *

7. Gli sviluppi dei precedenti paragrafi sono validi nelle ipotesi enunciate, cioè quando gli autovalori della matrice M sono tutti reali e distinti tra loro.

È possibile tuttavia analizzare in modo analogo il caso in cui la matrice M abbia coppie di autovalori complessi coniugati.

Si osservi inoltre che si può costruire una soluzione, più generale di quella data qui, del problema trattato nel paragrafo 4, e quindi costruire degli insiemi più estesi di matrici M a componenti positive aventi tutte gli stessi elementi di Frobenius.

Ciò permetterebbe anche di formulare vari criteri di scelta tra matrici di questo tipo; pensiamo pertanto che ciò possa dare un contributo alla soluzione di alcuni interessanti problemi della Teoria economica.

In particolare i risultati qui esposti saranno applicati in un prossimo futuro ad alcune questioni aperte riguardanti dei modelli lineari, come il classico modello di Sraffa e i modelli di produzione congiunta.

Summary: Observations on the Construction of a Class of Square Matrix Subject to Particular Conditions (J.E.L. C60).

A class of square, real, strictly positive matric, all of them having the same Frobenius elements (eigenvalue and eigenvectors) is given.